Grado en Física

Examen de Cálculo I - Convocatoria de febrero 2014

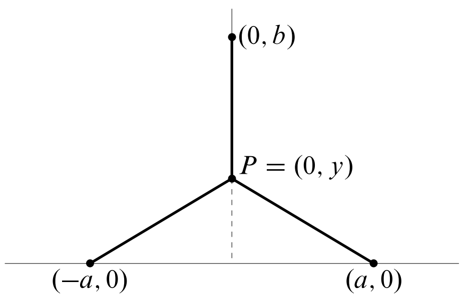
Ejercicio 1.

a) (1 punto) Sea $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in [-1, 1]$. Prueba que hay algún $c \in [-1, 1]$ para el que se verifica la igualdad $f(c) = \frac{1}{4}(c^3 + 3c)$.

b) (1 punto) Prueba que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que $\operatorname{sen} x \geqslant \frac{2}{\pi} x$.

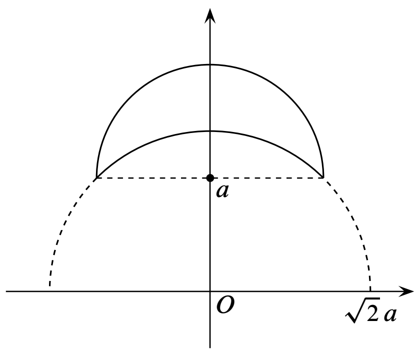
Ejercicio 2. (2 puntos)

Dos fábricas están situadas en $(-a, 0)$ y $(a, 0)$ y en $(0, b)$ hay una central eléctrica. Calcula el punto $P = (0, y)$ para que la longitud total del tendido eléctrico desde la central a las fábricas sea mínimo. Debes discutir el resultado según los valores de a y de b.



Ejercicio 3. (2 puntos)

Sea $a > 0$. Calcula usando técnicas de integración el área de la luna formada por la parte del círculo $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ que es exterior al círculo $x^2 + y^2 = 2a^2$. Calcula el volumen del sólido obtenido al girar dicha luna alrededor del eje de abscisas.



Ejercicio 4. a) (1 punto) Estudia la convergencia absoluta y la convergencia de las siguientes series:

$$\text{i)} \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3 + 1}; \qquad \text{ii)} \sum_{n \geqslant 1} \frac{(3n)!}{(5n)^{3n}} 2^n$$

b) (0,5 puntos) Calcula el límite de la sucesión: $x_n = \dfrac{\ln(n!)}{\ln(n^n)}$.

c) (0,5 puntos) Calcula el límite: $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2 - 2\cos x} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \right)$.

Ejercicio 5. (2 puntos) Dado $t > 0$, sea $V(t)$ el volumen del sólido de revolución obtenido al girar alrededor del eje OX la región del plano comprendida bajo la curva

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)(x^2+2x+2)}} \qquad (0 \leqslant x \leqslant t)$$

Calcula $V(t)$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} V(t)$.

Ejercicio 6. Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$.

a) (0,5 puntos) Calcula el radio de convergencia y estudia la convergencia de la serie en los extremos del intervalo de convergencia.

b) (1 punto) Calcula, usando el teorema de derivación de series de potencias, la función suma de la serie.

c) (0,5 puntos) Calcula $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}$.

Pondré las calificaciones y las soluciones en el SWAD antes del día 13. Revisión de exámenes el próximo jueves día 13 de 16:00 a 18:00 en mi despacho.

Granada, 7 de febrero de 2014